

鋼梁の崩壊温度

著者	中川 弘文
著者別名	Nakagawa Hirofumi
内容記述	筑波大学博士（工学）学位論文・平成12年3月24日 授与（甲第2350号）
発行年	2000
URL	http://hdl.handle.net/2241/6457

2章 鋼梁の数値解析モデル

火災加熱を被る鋼梁には、横座屈が発生することが考えられる。また合成梁の場合には、ウェブが面外に反る 3 次元的不安定挙動が発生すると考えられる。本研究の目的である、火災加熱を被る鋼梁の崩壊温度を明らかにするために、3 次元的不安定挙動を有する鋼梁の挙動を詳細に解析できる数値解析モデルを提案し、これを本章前半部において説明する。本章後半では、提案した数値解析モデルに組み込む高温時応力～歪曲線に関して述べる。

2.1 8-node 長方形要素の節点と節点自由度

薄板の有限要素解析における代表的な研究として、Bathe の 4-node shell 要素[文献 64]が挙げられる。4-node shell 要素の 4 隅の節点における自由度は、図 2.1.1 に示すように、並進 3 自由度、面外回転 2 自由度である。

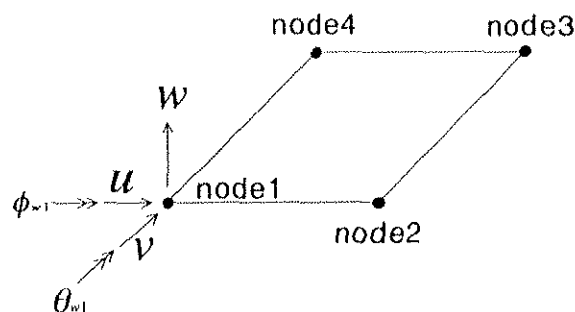


図 2.1.1 Bathe の 4-node shell 要素

4-node shell 要素のこのような自由度の設定方法は、4-node shell 要素境界において、隣り合う shell 要素の法線ベクトルが一致する場合のみ有効である。しかし、Bathe の 4-node shell 要素は、H 型鋼梁のようにウェブ・フランジ接合部のような shell 要素境界において、隣り合う shell 要素の要素法線ベクトルが一致しない形状を解析対象とする場合においては、図 2.1.2 に示すようにフランジ shell 要素面外回転による変位がウェブ shell 要素面内変位と要素間で適合しない。よって本研究の解析対象である、H 型鋼梁の数値解析を適切に行うために、4-node shell 要素をウェブ・フランジ接合部において変位が適合するように改良する必要がある。

小川等は、ウェブ・フランジ境界部分において変位の適合性を保つために、図 2.1.3 に示すように 4-node 各節点において、面内回転自由度を各々 1 つずつ付加した。

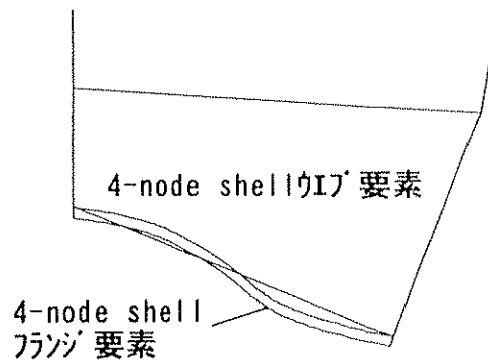


図 2. 1. 2 H型鋼ウィブ・フランジ接合部における変位の不連続

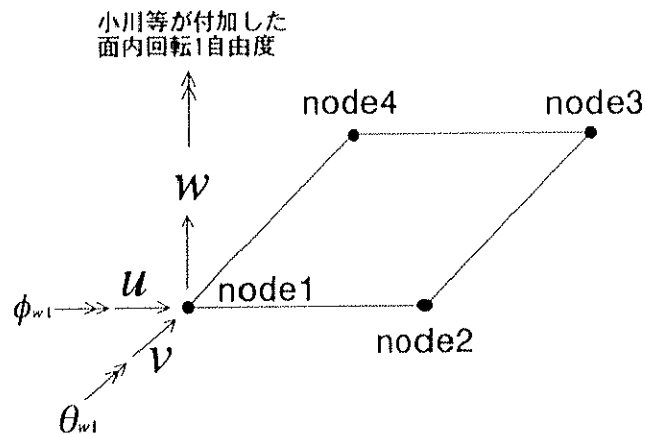


図 2. 1. 3 小川等が付加した面内回転 1 自由度

確かに 4-node shell 要素各節点に面内回転 1 自由度を付加することにより、ウィブ・フランジ接合部における変位の適合性が図 2. 1. 4 に示すように保たれる。しかし、4-node shell 要素の各節点に面内回転自由度を 1 つだけ付加した場合では、図 2. 1. 5 に示されるような、鋼梁が本来有するであろう変形は生じない。それは、4-node shell 要素が面内回転自由度を 1 つしか持たないため、フランジが 4-node shell 要素境界で面外に変形しようとしても、ウィブがフランジの面外変形を拘束してしまうからである。よって小川等の FEM 精算結果はウィブ・フランジ接合部においてフランジ面外方向の局部座屈を発生せず、本来の鋼梁の変形より明らかに小さい変形を算出してしまう。小川等はこの問題に対処するため、4-node shell 要素を微小にすることで精算結果の妥当性を高めている。

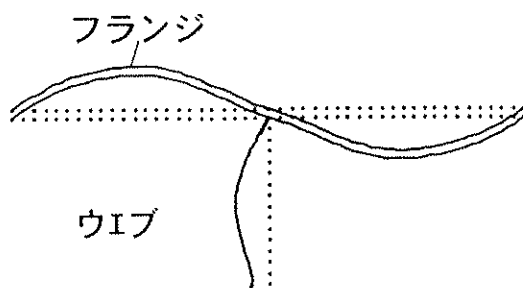


図 2.1.4

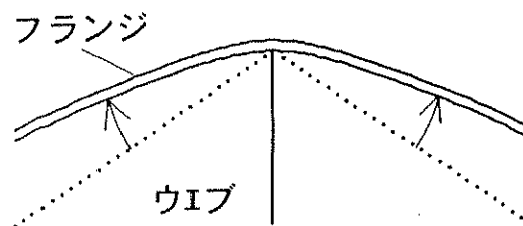


図 2.1.5

4-node shell 要素の各節点に面内回転自由度を 1 つ付加する場合、ウェブ・フランジ接合部においてフランジの面外変形が拘束されると上で指摘したが、図 2.1.6 に示すように、フランジ要素間の変位の連続性を犠牲にすることで、ウェブはフランジを拘束せず、ウェブ・フランジ接合部でフランジが面外に変形できる。しかし、実際の鋼梁はこのような変形を生じないことは明らかであり、やはり小川等の 4-node shell 要素は鋼梁の FEM 数値解析において不適当であると考えられる。

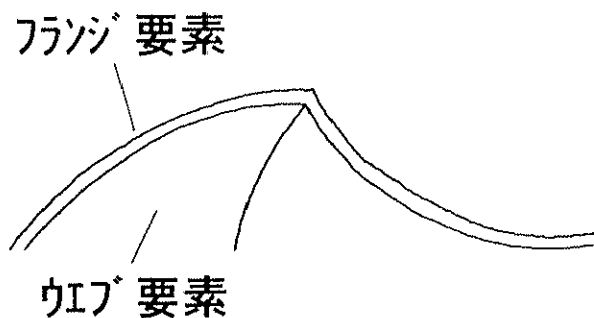


図 2.1.6 フランジの変形の連続性を保持しないときのウェブ・フランジ接合部変位

よって、本研究では、小川等の 4-node shell 要素をさらに改良し、Bathe の 4-node shell 要素の各節点に 2 つの独立した、面内回転自由度を付加する。これらは図 2.1.7 に示すように、各々独立した自由度である。図 2.1.7 中 ϕ は x 方向面内変位のみに寄与する回転自由度である。また θ は y 方向面内変位のみに寄与する回転自由度である。図 2.1.7 では、2 つの独立した面内回転自由度 ϕ 、 θ が正方向に変位したとき、shell 要素内の任意点が xy 平面の正方向に変位するように面内回転自由度の向きを設定してある。

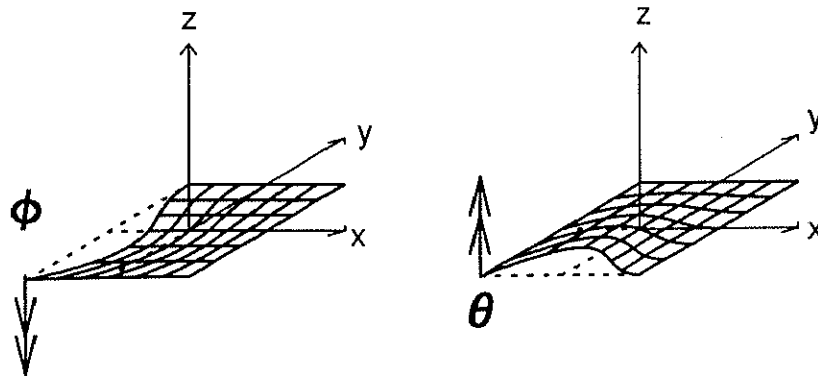


図 2.1.7 面内回転 2 自由度

このように Bathe の 4-node shell の各節点に 2 つの独立した面内回転自由度を付加することで、図 2.1.8 に示すように、フランジ要素境界において変位の適合性を保持しても、ウェブはフランジの面外変位を拘束しない。本研究では、変位の適合性をさらに保証するために、shell 要素の midpoint に、各辺方向に並進 1 自由度を設定する。本研究では、この改良した shell 要素を 8-node 長方形要素と呼ぶ。

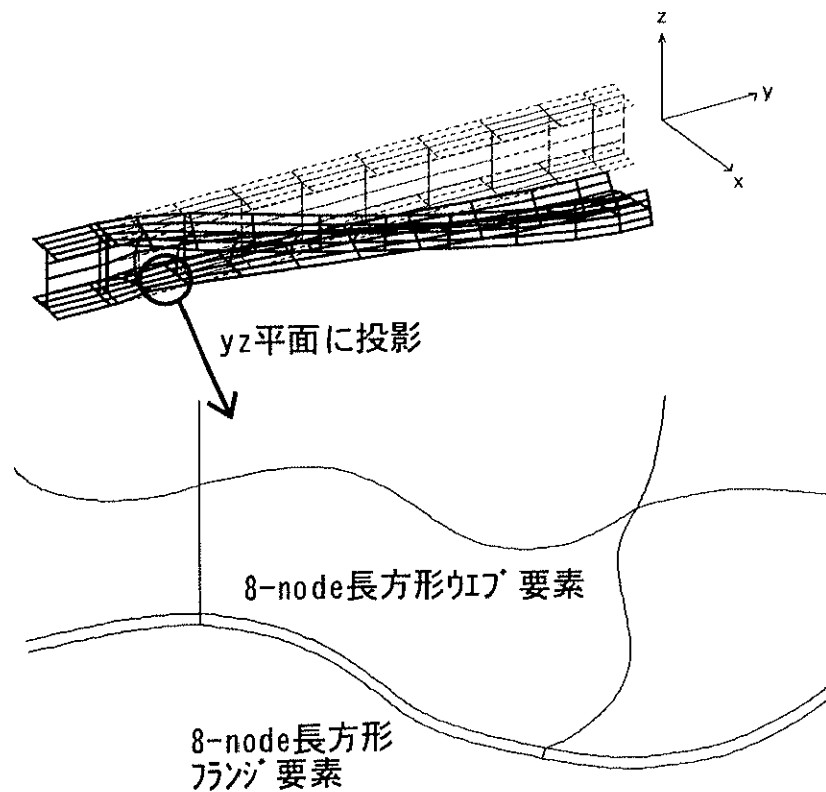


図 2.1.8 8-node 長方形要素によるウェブ・フランジの変位適合

以上に示した 8-node 長方形要素は、ウェブ・フランジ接合部において変位が適合し、フランジ要素間で変形が連続しても、ウェブがフランジの面外変位を拘束しない点において、小川等の 4-node shell より不安定現象を発生しやすく、FEM 精算結果は小川等の 4-node shell より安全側であり、妥当性の高いものである。よって、本研究では小川等の FEM 数値解析ほど、shell 要素を小さく分割しない。8-node 長方形要素内に局部座屈波形が約半波形、形成される程に H 型鋼梁を 8-node 長方形要素に分割する。図 2.1.9 に示すように 8-node 長方形要素の節点番号を規定する。節点 1～4 に各々 7 自由度、節点 5～8 に各々 1 自由度なので、8-node 長方形要素内の全自由度は 32 自由度である。

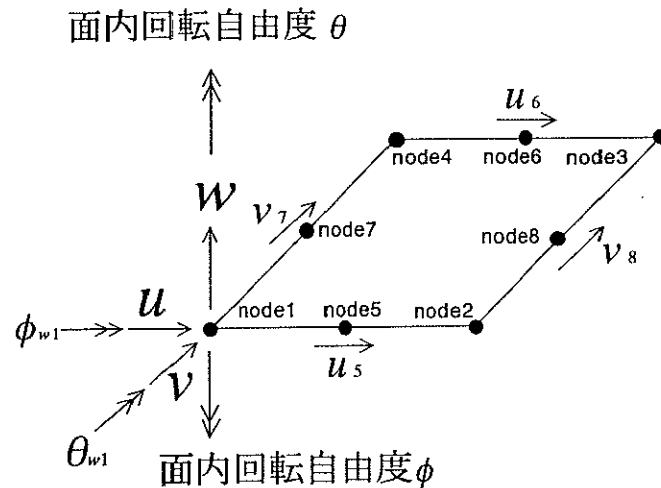


図 2.1.9 8-node 長方形要素の節点番号と自由度

2.2 8-node 長方形要素の変位関数の設定

前節までに 8-node 長方形要素の自由度とその節点を定義した。本節では適切な変位関数を設定することにより、節点変位と 8-node 長方形要素内の変位を結びつける、節点自由度～要素内変位マトリックスを導出する。

○並進自由度による要素内の変位

任意形状の 8-node 長方形要素に変位関数を設定するために、要素の重心に原点を取った $\xi\eta\zeta$ 無次元座標系を板要素に設定する。各節点の並進自由度 u_i, v_i, w_i ($i = 1 \sim 4$ 、添時は節点番号) により、要素内の変位が図 2.2.1 に示すように直線分布するとする。そうすると各節点の並進自由度 u_i, v_i, w_i ($i = 1 \sim 4$) に対する要素内の変位は式(2.2.1)で与えられる。

$$u = [A] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad v = [A] \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad w = [A] \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{Bmatrix} \quad (2.2.1)$$

ここで

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1-\xi}{2} \cdot \frac{1-\eta}{2} & \frac{1+\xi}{2} \cdot \frac{1-\eta}{2} & \frac{1+\xi}{2} \cdot \frac{1+\eta}{2} & \frac{1-\xi}{2} \cdot \frac{1+\eta}{2} \end{bmatrix}$$

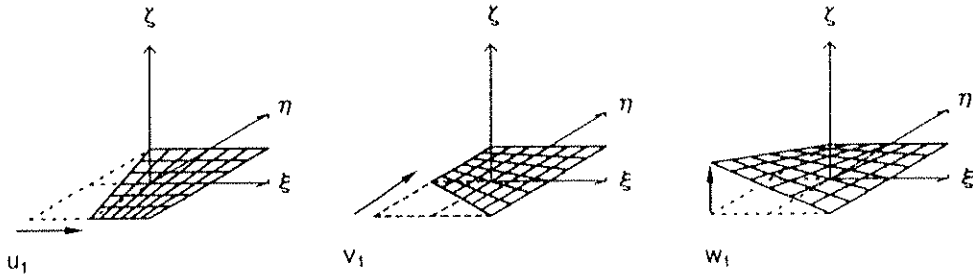


図 2. 2. 1 並進自由度による要素内変位

8-node 長方形要素は、各辺中点に辺方向の並進 1 自由度を持つ節点を設定することで、さらに変位の適合性を高めることができる。節点 5～8 の各節点の並進自由度 u_i ($i = 5, 6$)、 v_i ($i = 7, 8$) により、要素内の変位が図 2. 2. 2 に示すように放物線分布するとする。そうすると各節点の並進自由度 u_i ($i = 5 \sim 6$)、 v_i ($i = 7 \sim 8$) に対する要素内の変位は式(2.2.2)～式(2.2.3)で与えられる。

$$u = [B] \begin{Bmatrix} u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} \quad (2.2.2)$$

$$v = [B'] \begin{Bmatrix} v_7 \\ v_8 \end{Bmatrix} \quad (2.2.3)$$

ここで

$$[B] = \begin{bmatrix} (1-\xi^2) \cdot \frac{1-\eta}{2} & (1-\xi^2) \cdot \frac{1+\eta}{2} \end{bmatrix}$$

$$[B'] = \begin{bmatrix} (1-\eta^2) \cdot \frac{1-\xi}{2} & (1-\eta^2) \cdot \frac{1+\xi}{2} \end{bmatrix}$$

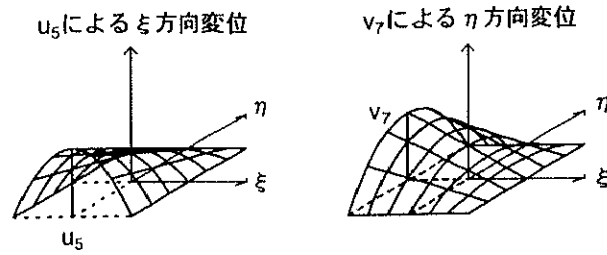


図 2.2.2 付加自由度による要素内変位分布図

以上で 8-node 長方形要素の並進節点自由度による要素内変位関数を全て設定した。しかし、付加節点 5~8 を設定したため、 u_i ($i=1\sim4$ と 5,6)、 v_i ($i=1\sim4$ と 7,8) がそれぞれ同量するとき、要素が単純に剛体変位するはずであるにも関わらず、図 2.2.3 に示すように、要素内に変位勾配を生じてしまう。これは 8-node 長方形要素が単純に剛体並進変位を生じるとき、要素内に歪が発生することを意味する。

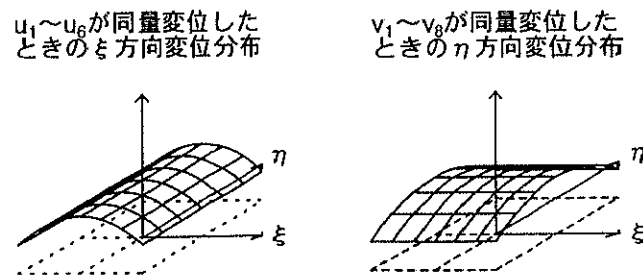


図 2.2.3 剛体並進変位により発生する要素内変位勾配

これを解消するために、並進節点変位 u_i, v_i ($i=1\sim4$) による変位関数式(2.2.1)から、付加節点の並進自由度 u_i ($i=5,6$) v_i ($i=7,8$) による変位関数式(2.2.2)と式(2.2.3)をそれぞれ差し引く。以上により u_i ($i=1\sim4$ と 5,6)、 v_i ($i=1\sim4$ と 7,8) がそれぞれ同量変位したとき、要素内に変位勾配が発生せず、要素が単純に剛体変位することができる。修正された u_i, v_i ($i=1\sim4$) の変位分布は同一であるので、 u_i の変位分布のみを図 2.2.4 に示し、修正後の変位

関数を式(2.2.4)と式(2.2.5)に示す。

$$u = [A' \quad B] \{u\} \quad (2.2.4)$$

$$v = [A'' \quad B'] \{v\} \quad (2.2.5)$$

ここで

$$A' = \begin{bmatrix} -\frac{1-\eta}{2} \cdot \frac{1-\xi}{2} \cdot \xi & \frac{1-\eta}{2} \cdot \frac{1+\xi}{2} \cdot \xi & \frac{1+\eta}{2} \cdot \frac{1+\xi}{2} \cdot \xi & -\frac{1+\eta}{2} \cdot \frac{1-\xi}{2} \cdot \xi \\ -\frac{1-\xi}{2} \cdot \frac{1-\eta}{2} \cdot \eta & -\frac{1+\xi}{2} \cdot \frac{1-\eta}{2} \cdot \eta & \frac{1+\xi}{2} \cdot \frac{1+\eta}{2} \cdot \eta & \frac{1-\xi}{2} \cdot \frac{1+\eta}{2} \cdot \eta \end{bmatrix}$$

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix}, \quad \{v\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_7 \\ v_8 \end{Bmatrix}$$

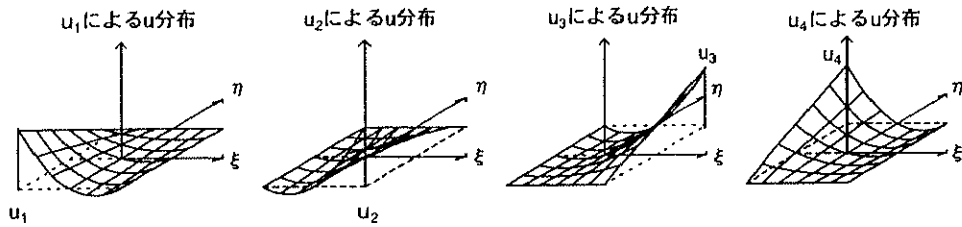


図 2.2.4 節点 1 から節点 4 における並進面内変位の修正後変位分布

○回転自由度による要素内の変位

要素内全ての回転自由度は図 2.2.5 に示すように、要素内に 3 次関数変位とこれに直交する方向に直線変位をもたらすとする。始めに面内変位に寄与する回転自由度 $\phi_i, \theta_i (i = 1 \sim 4)$ について説明する。これらの自由度に変位が発生すると要素内には下式による変位が発生する。

$$u = [C]\{\phi\} \quad (2.2.6)$$

$$v = [D]\{\theta\} \quad (2.2.7)$$

ここに

$$C = \begin{bmatrix} \frac{(1+\eta)(1-\eta)^2}{4} \cdot \frac{1-\xi}{2} & \frac{(1+\eta)(1-\eta)^2}{4} \cdot \frac{1+\xi}{2} & -\frac{(1-\eta)(1+\eta)^2}{4} \cdot \frac{1+\xi}{2} & -\frac{(1-\eta)(1+\eta)^2}{4} \cdot \frac{1-\xi}{2} \\ \frac{(1+\xi)(1-\xi)^2}{4} \cdot \frac{1-\eta}{2} & -\frac{(1-\xi)(1+\xi)^2}{4} \cdot \frac{1-\eta}{2} & -\frac{(1-\xi)(1+\xi)^2}{4} \cdot \frac{1+\eta}{2} & \frac{(1+\xi)(1-\xi)^2}{4} \cdot \frac{1+\eta}{2} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{(1+\xi)(1-\xi)^2}{4} \cdot \frac{1-\eta}{2} & -\frac{(1-\xi)(1+\xi)^2}{4} \cdot \frac{1-\eta}{2} & -\frac{(1-\xi)(1+\xi)^2}{4} \cdot \frac{1+\eta}{2} & \frac{(1+\xi)(1-\xi)^2}{4} \cdot \frac{1+\eta}{2} \end{bmatrix}$$

$$\{\phi\} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix}, \quad \{\theta\} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{Bmatrix}$$

次に面外変位に寄与する回転自由度 $\phi_w, \theta_w (i = 1 \sim 4)$ について説明する。これらの自由度に変位が発生すると要素内には式(2.2.6)と式(2.2.7)の重ね合わせにより、下式の変位が発生する。

$$w = [C]\{\phi_w\} + [D]\{\theta_w\} \quad (2.2.8)$$

ここで

$$\{\phi_w\} = \begin{Bmatrix} \phi_{w1} \\ \phi_{w2} \\ \phi_{w3} \\ \phi_{w4} \end{Bmatrix}, \quad \{\theta_w\} = \begin{Bmatrix} \theta_{w1} \\ \theta_{w2} \\ \theta_{w3} \\ \theta_{w4} \end{Bmatrix}$$

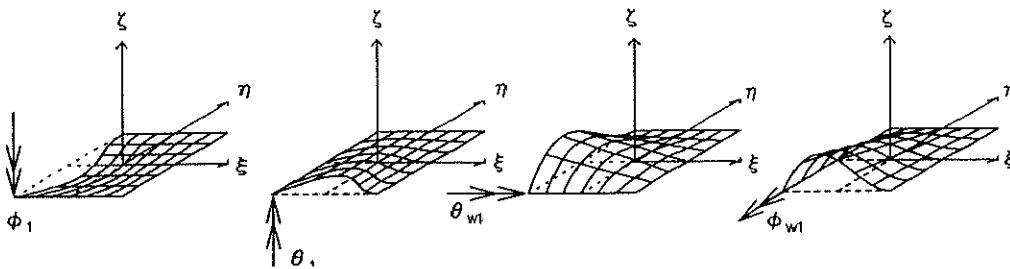


図 2.2.5 節点 1 から節点 4 における回転面内・面外変位の変位分布

○並進自由度と回転自由度による要素内の変位

以上で、並進自由度による要素内の変位と回転自由度による要素内の変位を各々導出した。ここに並進自由度による要素内変位と回転自由度による要素内変位を重ね合わせる。よって節点自由度による変位と 8-node 長方形要素内における任意点の変位は式(2.2.9)～(2.2.11)で表せる。

$$u = [A' \quad B] \{u\} + [C] \{\phi\} \quad (2.2.9)$$

$$v = [A'' \quad B'] \{v\} + [D] \{\theta\} \quad (2.2.10)$$

$$w = [A] \{w\} + [C] \{\phi_w\} + [D] \{\theta_w\} \quad (2.2.11)$$

2.3 回転自由度における連続性の考慮

板要素を実際の解析において H 型鋼梁に集成する際、板要素の境界における変位が連続する必要がある。前節で定めた並進自由度の変位量 u, v, w は、全体座標系からの変位量であるので、板要素境界における並進変位の連続性は自動的に保持される。しかし、回転自由度による変位量 $\phi, \theta, \phi_w, \theta_w$ ($i = 1 \sim 4$) は何れも 8-node 長方形要素の各辺からの回転変位量であるので、回転自由度による変位の連続性は保持されない。そこで図 2.3.1 に示すように、回転自由度の変位量を 8-node 長方形要素の各辺からの変位量でなく、全体座標系に基づく変位量に変換する必要がある。

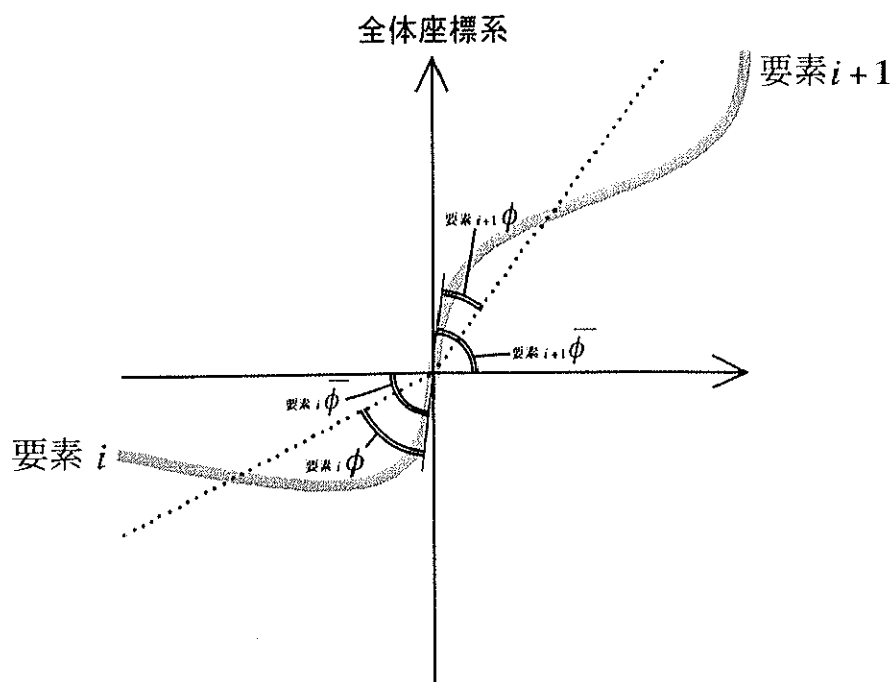


図 2.3.1 板要素境界における変位の連続

図 2.3.1 は隣合う 8-node 長方形要素の境界部を示す。要素 i 番目の回転自由度 ϕ_i と要素 $i+1$ 番目の回転自由度 ϕ_{i+1} を例にとる。板要素各辺からの回転量 ϕ では $\phi_i = \phi_{i+1}$ としても板要素境界で回転変位量が連続しない。よって、板要素 i 番目と板要素 $i+1$ 番目の要素境界で回転変位量が連続するためには、回転自由度の回転量を板要素各辺からの回転量 ϕ ではなく、全体座標系からの回転量 $\bar{\phi}$ に変換する必要がある。 $\bar{\phi}_i = \bar{\phi}_{i+1}$ とすることで、板要素境界部で変位の連続性が保持される。よって式 (2.2.9) ～ 式 (2.2.11) を全体座標系からの回転変位量 $\bar{\phi}, \bar{\theta}, \bar{\phi}_w, \bar{\theta}_w$ ($i = 1 \sim 4$) によりあらわす。はじめに要素面内回転自由度 $\bar{\phi}$ について示す。 $\bar{\phi}$ は全体座標系からの回転量なので、式 (2.2.9) に示される u を η で微分することで下式のように得られる。

$$\{\bar{\phi}\} = \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{b} [A'_\eta \quad B_\eta] \{u\} + \frac{1}{b} [C_\eta] \{\phi\} = \frac{1}{b} [A'_\eta \quad B_\eta] \{u\} + \frac{1}{b} \{\phi\} \quad (2.3.1)$$

但し、添字は偏微分を表す。上式より下式が導かれる

$$\{\phi\} = -[A'_\eta \quad B_\eta] \{u\} + b \{\bar{\phi}\} \quad (2.3.2)$$

上式を式 (2.2.9) に代入して、最終的に下式を得る。

$$u = [A' \quad B] - [C][A'_\eta \quad B_\eta] \{u\} + b [C] \{\bar{\phi}\} \quad (2.3.3)$$

v, w についても同様に、全体座標系からの回転量で表記すると下式が導かれる。

$$v = [A'' \quad B'] - [D][A''_\xi \quad B'_\xi] \{v\} + a [D] \{\bar{\theta}\} \quad (2.3.4)$$

$$w = [A] - [C][A_\eta] - [D][A_\xi] \{w\} + b [C] \{\bar{\phi}_w\} + a [D] \{\bar{\theta}_w\} \quad (2.3.5)$$

以上より回転自由度の変位量を全体座標系からの変位量とした変位関数が設定される。後節における式の展開のため、式 (2.3.3) ～ 式 (2.3.5) に示した節点変位～板要素内変位ベクトルを下式により定義する。

$$[U] = [A' \quad B] - [C][A'_\eta \quad B_\eta] \quad b [C]$$

$$[V] = [A'' \quad B'] - [D][A''_\xi \quad B'_\xi] \quad a [D]$$

$$[W] = [A] - [C][A_\eta] - [D][A_\xi] \quad b [C] \quad a [D]$$

2.4 支配方程式

前節までに、8-node 長方形要素における各節点自由度の変位関数を定義し、8-node 長方形要素の節点変位～要素内変位ベクトルを導出した。本節では、仮想仕事の原理による 8-node 長方形要素の釣り合い式を得るために、節点変位～要素内変位ベクトルから、節点変位～要素内歪ベクトル（以下 B マトリックス）を導出する。 B マトリックスにより、板要素の仮想変位による仮想歪を節点変位ベクトルであらわす。本研究では大変形問題を対象とするため歪として、Lagrange 歪を採用した。よって導出した仮想歪は非線型性を有する。よって仮想歪の高次項を無視し、仮想仕事の原理により板要素の漸化式を導出する。導出した漸化式を Newton の収束演算により、与えた荷重に対する変形を算出する。

図 2.4.1 に示すように xyz 座標系 xy 面内に板の中央面を置き、右手系正の方向に z 座標（板厚座標）をとる。8-node 長方形要素の曲げ回転は有限、歪は微小と仮定すると、要素板内の歪は中央面の歪と微小板曲げ歪の重ね合わせとして求められる。

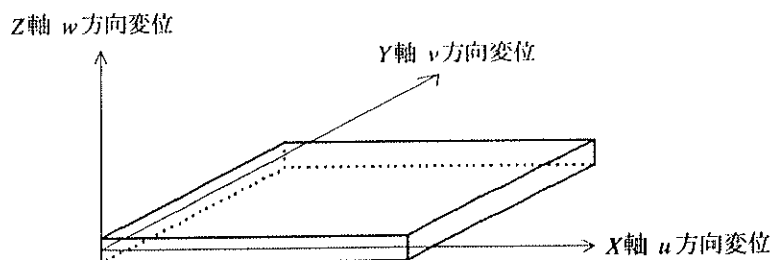


図 2.4.1 座標軸の設定

u, v を板の中央面内変位、 w を xy 座標面、面外たわみとすると中央面以外の点の変位は下式で表される。

$$\bar{u} = u - zw_x \quad (2.4.1)$$

$$\bar{v} = v - zw_y \quad (2.4.2)$$

$$\bar{w} = w \quad (2.4.3)$$

次に上式の変位から歪を導くが、本研究では数値解析に際して大変形問題を算出できるように、8-node 長方形要素内の歪として下式に示す Lagrange 歪を採用する。

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_j} \right] \quad (2.4.4)$$

8-node 長方形要素の板厚が長方形各辺長と比較して十分小さい状態を解析対象とするので、8-node 長方形要素内の応力状態を平面応力状態と仮定した。よって式 (2.4.1) ~ 式(2.4.3)を式 (2.4.4) の Lagrange 歪式に代入し、 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ のみ算出し、それらを次式に示す。

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 \right] \\ &= u_x - zw_{xx} + \frac{1}{2}(u_x^2 + v_x^2 + w_x^2) - u_x zw_{xx} + \frac{1}{2}z^2 w_{xx}^2 - v_x zw_{xy} + \frac{1}{2}z^2 w_{xy}^2 \\ &\cong u_x - zw_{xx} + \frac{1}{2}(u_x^2 + v_x^2 + w_x^2)\end{aligned}\quad (2.4.5)$$

ここで、微小項は省略した。同様にして、

$$\varepsilon_y \cong v_y - zw_{yy} + \frac{1}{2}(u_y^2 + v_y^2 + w_y^2) \quad (2.4.6)$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} \cong u_y + v_x - 2zw_{xy} + u_x u_y + v_x v_y + w_x w_y \quad (2.4.7)$$

未知関数 u 、 v 、 w は板要素内の任意点 x 、 y に依存する関数であり、歪は未知関数の非線形な関数になっているので支配方程式は非線形であると考えられる。そこで、支配方程式を解くのにニュートン法を用い、ニュートン法における漸化式を導くのに仮想仕事の原理を用いる。

ここに外力 \bar{P}_x 、 \bar{P}_y 、 \bar{P}_z と内部力 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} が釣り合い状態にある板要素を考える。いま釣り合っている位置 (t 時) を基点として、これより少し後の ($t + \Delta t$ 時) の釣り合いを考え、仮想変位を δu 、 δv 、 δw で表す。仮想仕事の原理より次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\iiint_V (\sigma_x^{t+\Delta t} \delta \varepsilon_x^{t+\Delta t} + \sigma_y^{t+\Delta t} \delta \varepsilon_y^{t+\Delta t} + \tau_{xy}^{t+\Delta t} \delta \gamma_{xy}^{t+\Delta t}) dx dy dz \\ = \bar{P}_x^{t+\Delta t} \delta u + \bar{P}_y^{t+\Delta t} \delta v + \bar{P}_z^{t+\Delta t} \delta w\end{aligned}\quad (2.4.8)$$

上の仮想仕事式が意味を持つためには仮想変位が生ずる間、外力、応力は大きさを変えてはならない。これが保証されるためには仮想変位が無限小であることが必要条件となる。よって仮想変位に応答する歪の変分 (仮想歪) $\delta \varepsilon_x$ 、 $\delta \varepsilon_y$ 、 $\delta \gamma_{xy}$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\delta \varepsilon_x &= \lim_{\substack{\delta u \rightarrow 0 \\ \delta v \rightarrow 0 \\ \delta w \rightarrow 0}} \varepsilon_x(u + \delta u, v + \delta v, w + \delta w) - \varepsilon_x(u, v, w) \\ &= \delta u_x - z \delta w_{xx} + u_x \delta u_x + v_x \delta v_x + w_x \delta w_x \quad (= \delta \varepsilon_x^{(0)} \text{ とおく})\end{aligned}\quad (2.4.9)$$

同様に

$$\delta \varepsilon_y = \delta u_y - z \delta w_{,y} + u_y \delta u_x + v_y \delta v_x + w_y \delta w_x \quad (= \delta \varepsilon_y^{(1)} \text{ とおく}) \quad (2.4.10)$$

$$\begin{aligned} \delta \gamma_{xy} &= \delta u_y + \delta v_x - 2z \delta w_{,y} \\ &\quad + u_x \delta u_y + \delta u_x u_y + v_x \delta v_y + \delta v_x v_y + w_x \delta w_y + \delta w_x w_y \quad (= \delta \gamma_{xy}^{(1)} \text{ とおく}) \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

$t + \Delta t$ 時の $\delta \varepsilon_x$ の変分 $\delta \varepsilon_x^{(1+\Delta)}$ は上式に $t + \Delta t$ 時の諸量を代入すればよい。即ち以下のように示される。

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_x^{(1+\Delta)} &= \delta u_x - z \delta w_{,x} + u_x^{(1+\Delta)} \delta u_x + v_x^{(1+\Delta)} \delta v_x + w_x^{(1+\Delta)} \delta w_x \\ &= \delta u_x - z \delta w_{,x} + (u_x + \Delta u_x) \delta u_x + (v_x + \Delta v_x) \delta v_x + (w_x + \Delta w_x) \delta w_x \\ &= \delta \varepsilon_x^{(1)} + \Delta u_x \delta u_x + \Delta v_x \delta v_x + \Delta w_x \delta w_x \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

同様に

$$\delta \varepsilon_y^{(1+\Delta)} = \delta \varepsilon_y^{(1)} + \Delta u_y \delta u_y + \Delta v_y \delta v_y + \Delta w_y \delta w_y \quad (2.4.13)$$

$$\delta \gamma_{xy}^{(1+\Delta)} = \delta \gamma_{xy}^{(1)} + \Delta u_x \delta u_y + \delta u_x \Delta u_y + \Delta v_x \delta v_y + \delta v_x \Delta v_y + \Delta w_x \delta w_y + \delta w_x \Delta w_y \quad (2.4.14)$$

ここで、 Δu 、 Δv 、 Δw は両時刻間の未知関数の増分（変分ではない）であり、小さいことを念頭においているが、有限である（無限小ではない）。

また、平面応力状態における応力増分 $\Delta \sigma_x$ 、 $\Delta \sigma_y$ 、 $\Delta \tau_{xy}$ と歪増分 $\Delta \varepsilon_x$ 、 $\Delta \varepsilon_y$ 、 $\Delta \gamma_{xy}$ の関係は弾塑性時共に一般的に下式で与えられる。

$$\begin{pmatrix} \Delta \sigma_x \\ \Delta \sigma_y \\ \Delta \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ & D_{22} & D_{23} \\ sym & & D_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_x \\ \Delta \varepsilon_y \\ \Delta \gamma_{xy} \end{pmatrix} = [D] \begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_x \\ \Delta \varepsilon_y \\ \Delta \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.4.15)$$

よって、 $t + \Delta t$ 時の応力 3 成分 $\sigma_x^{(1+\Delta)}$ 、 $\sigma_y^{(1+\Delta)}$ 、 $\tau_{xy}^{(1+\Delta)}$ を t 時の応力 3 成分 σ_x^t 、 σ_y^t 、 τ_{xy}^t と歪増分 $\Delta \varepsilon_x$ 、 $\Delta \varepsilon_y$ 、 $\Delta \gamma_{xy}$ で表記すると下式のようなになる。

$$\begin{pmatrix} \sigma_x^{(1+\Delta)} \\ \sigma_y^{(1+\Delta)} \\ \tau_{xy}^{(1+\Delta)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x^t \\ \sigma_y^t \\ \tau_{xy}^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta \sigma_x \\ \Delta \sigma_y \\ \Delta \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x^t \\ \sigma_y^t \\ \tau_{xy}^t \end{pmatrix} + [D] \begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_x \\ \Delta \varepsilon_y \\ \Delta \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.4.16)$$

ここで歪増分 $\Delta\epsilon_x, \Delta\epsilon_y, \Delta\gamma_{xy}$ は t 時と $t + \Delta t$ 時の間の歪差であり、有限である。即ち歪増分は式(2.4.5)～式(2.4.7)より以下のように表せる。

$$\Delta\epsilon_x \cong \Delta u_x - z\Delta w_x + u_x\Delta u_x + v_x\Delta v_x + w_x\Delta w_x \quad (= \Delta\epsilon_x^{(0)} \text{ とおく}) \quad (2.4.17)$$

$$\Delta\epsilon_y \cong \Delta u_y - z\Delta w_y + u_y\Delta u_y + v_y\Delta v_y + w_y\Delta w_y \quad (= \Delta\epsilon_y^{(0)} \text{ とおく}) \quad (2.4.18)$$

$$\begin{aligned} \Delta\gamma_{xy} \cong \Delta u_y + \Delta v_x - 2z\Delta w_{xy} \\ + u'_x\Delta u_y + \Delta u_x u'_y + v'_x\Delta v_y + \Delta v_x v'_y + w'_x\Delta w_y + \Delta w_x w'_y \quad (= \Delta\gamma_{xy}^{(0)} \text{ とおく}) \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

求めるものはニュートン法における漸化式であり、これは未知増分 Δu 、 Δv 、 Δw に関して線形な方程式であるから、式(2.4.17)～式(2.4.19)に関しては 2 次以上の項を省略して表記した。以上をまとめると下式に示す漸化式を得る。

$$\begin{aligned} \int_V \left[\begin{pmatrix} \delta\epsilon_x^{(1)} & \delta\epsilon_y^{(1)} & \delta\gamma_{xy}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ & D_{22} & D_{23} \\ \text{sym} & & D_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\epsilon_x^{(1)} \\ \Delta\epsilon_y^{(1)} \\ \Delta\gamma_{xy}^{(1)} \end{pmatrix} \right. \\ \left. + \sigma'_x (\Delta u_x \delta u_x + \Delta v_x \delta v_x + \Delta w_x \delta w_x) + \sigma'_y (\Delta u_y \delta u_y + \Delta v_y \delta v_y + \Delta w_y \delta w_y) \right. \\ \left. + \tau'_{xy} (\Delta u_x \delta u_y + \delta u_x \Delta u_y + \Delta v_x \delta v_y + \delta v_x \Delta v_y + \Delta w_x \delta w_y + \delta w_x \Delta w_y) \right] dV \\ = \begin{pmatrix} \bar{P}_x^{t+\Delta t} & \bar{P}_y^{t+\Delta t} & \bar{P}_z^{t+\Delta t} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\bar{u} \\ \delta\bar{v} \\ \delta\bar{z} \end{Bmatrix} - \int_V \begin{pmatrix} \delta\epsilon_x^{(1)} & \delta\epsilon_y^{(1)} & \delta\gamma_{xy}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \\ \tau'_{xy} \end{Bmatrix} dV \end{aligned} \quad (2.4.20)$$

さらにこれを 2.3 節で示した変位関数を用いて表す。始めに $\delta\epsilon_x^{(1)}$ 、 $\delta\epsilon_y^{(1)}$ 、 $\delta\gamma_{xy}^{(1)}$ は

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \delta\epsilon_x^{(1)} \\ \delta\epsilon_y^{(1)} \\ \delta\gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+u_x)U_x & v_x V_x & -zW_x + w_x W_x \\ u_y U_y & (1+v_y)V_y & -zW_y + w_y W_y \\ (1+u_x)U_y + u_x U_x & (1+v_y)V_x + v_y V_y & -2zW_{xy} + w_x W_y + w_y W_x \end{bmatrix} \{\delta\bar{\varphi}\} \\ = [B_u \quad B_v \quad B_w] \{\delta\bar{\varphi}\} \end{aligned} \quad (2.4.21)$$

と表せる。但し $\{\delta\bar{\varphi}\}$ は 32 個の変位成分の縦ベクトルであり $\{\delta\bar{\varphi}\}^T = \{^T\{\bar{u}\} \quad ^T\{\bar{v}\} \quad ^T\{\bar{w}\}\}$ である。ここに $\{\bar{u}\}^T = \{^T\{u\} \quad ^T\{\bar{\phi}\}\}$ 、 $\{\bar{v}\}^T = \{^T\{v\} \quad ^T\{\bar{\theta}\}\}$ 、 $\{\bar{w}\}^T = \{^T\{w\} \quad ^T\{\bar{\phi}_w\} \quad ^T\{\bar{\theta}_w\}\}$ である。

次に式(2.4.20)の左辺積分内の第 2 項目以後についても同様に変位関数を用いて表記すると、積分項の 2 項目以降はそれぞれ以下のように表せる。

$$\begin{aligned} \Delta u, \delta u, + \Delta v, \delta v, + \Delta w, \delta w, \\ = \{\delta \bar{u}\}^T [U^T U,] \{\Delta \bar{u}\} + \{\delta \bar{v}\}^T [V^T V,] \{\Delta \bar{v}\} + \{\delta \bar{w}\}^T [W^T W,] \{\Delta \bar{w}\} \end{aligned} \quad (2.4.22)$$

$$\begin{aligned} \Delta u, \delta u, + \Delta v, \delta v, + \Delta w, \delta w, \\ = \{\delta \bar{u}\}^T [U^T U,] \{\Delta \bar{u}\} + \{\delta \bar{v}\}^T [V^T V,] \{\Delta \bar{v}\} + \{\delta \bar{w}\}^T [W^T W,] \{\Delta \bar{w}\} \end{aligned} \quad (2.4.23)$$

$$\begin{aligned} \Delta u, \delta u, + \delta u, \Delta u, + \Delta v, \delta v, + \delta v, \Delta v, + \Delta w, \delta w, + \delta w, \Delta w, \\ = \{\delta \bar{u}\}^T [U^T U, + U^T U,] \{\Delta \bar{u}\} \\ + \{\delta \bar{v}\}^T [V^T V, + V^T V,] \{\Delta \bar{v}\} \\ + \{\delta \bar{w}\}^T [W^T W, + W^T W,] \{\Delta \bar{w}\} \end{aligned} \quad (2.4.24)$$

よって積分内の 2 項目以降をまとめてあらわすと以下のように示される。

$$\begin{aligned} \sigma'_i (\Delta u, \delta u, + \Delta v, \delta v, + \Delta w, \delta w,) + \sigma'_i (\Delta u, \delta u, + \Delta v, \delta v, + \Delta w, \delta w,) \\ + \tau'_{ij} (\Delta u, \delta u, + \delta u, \Delta u, + \Delta v, \delta v, + \delta v, \Delta v, + \Delta w, \delta w, + \delta w, \Delta w,) \\ = \{\delta \bar{u}\}^T [\sigma'_i U^T U, + \sigma'_i U^T U, + \tau'_{ij} (U^T U, + U^T U,)] \{\Delta \bar{u}\} \\ + \{\delta \bar{v}\}^T [\sigma'_i V^T V, + \sigma'_i V^T V, + \tau'_{ij} (V^T V, + V^T V,)] \{\Delta \bar{v}\} \\ + \{\delta \bar{w}\}^T [\sigma'_i W^T W, + \sigma'_i W^T W, + \tau'_{ij} (W^T W, + W^T W,)] \{\Delta \bar{w}\} \\ = \{\delta \bar{\varphi}\}^T \begin{bmatrix} C_u & 0 & 0 \\ & C_v & 0 \\ sym & & C_w \end{bmatrix} \{\Delta \bar{\varphi}\} \end{aligned} \quad (2.4.25)$$

以上に示した式の展開により、式(2.4.20)は下式であらわせる。

$$\begin{aligned} \int_V [[[B_u \ B_v \ B_w] \{\delta \bar{\varphi}\}^T [D] [B_u \ B_v \ B_w] \{\Delta \bar{\varphi}\} + \{\delta \bar{\varphi}\}^T \begin{bmatrix} C_u & 0 & 0 \\ & C_v & 0 \\ sym & & C_w \end{bmatrix} \{\Delta \bar{\varphi}\}] dV \\ = (\bar{\mathbf{P}}^{u,v,w}) \{\delta \bar{\varphi}\} - \int_V \{\delta \bar{\varphi}\}^T [B_u \ B_v \ B_w] \begin{bmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \\ \tau'_{xy} \end{bmatrix} dV \end{aligned} \quad (2.4.26)$$

式(2.4.26)は仮想変位の値によらず常に成立するので、式(2.4.26)を下式のように整理する。

$$\int_V \begin{bmatrix} B_v^T DB_v + C_v & B_v^T DB_v & B_v^T DB_w \\ & B_v^T DB_v + C_v & B_v^T DB_w \\ \text{sym} & & B_w^T DB_w + C_w \end{bmatrix} \{\Delta \bar{\varphi}\} dV = (\bar{P}^{t+\Delta t}) - \int_V \begin{bmatrix} B_v^T \\ B_v^T \\ B_w^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_v^t \\ \sigma_v^t \\ \tau_{vw}^t \end{bmatrix} dV \quad (2.4.27)$$

以上で釣り合い方程式が得られた。時刻 t の変形が既知であり、時刻 $t + \Delta t$ の変形を算出する場合は、漸化式を Newton 法の収束計算に適用して時刻 $t + \Delta t$ の未知変位を算出する。図 2.4.1 に示すように、漸化式(2.4.27)の右辺は Newton 法の収束計算において不釣り合い力であり、この不釣り合い力に対して節点自由度の変位増分 $\Delta \bar{\varphi}$ を算出する。不釣り合い力と変位増分 $\Delta \bar{\varphi}$ が十分収束した時点で収束計算を終了する。Newton 法の収束計算より得た全ての $\Delta \bar{\varphi}$ を時刻 t の変形に足し合わせることで、時刻 $t + \Delta t$ の未知変位を得る。

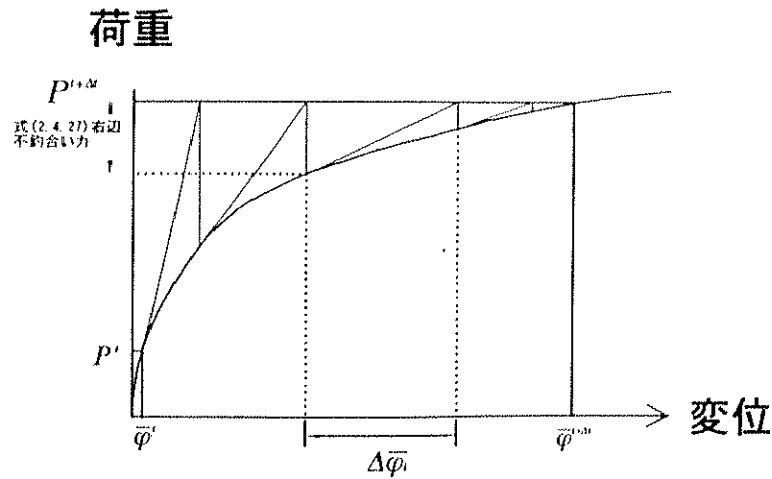


図 2.4.1 Newton 法による収束計算

2.5 応力～歪関係式

前節で漸化式(2.4.27)を Newton 法による収束計算で解くことにより、 $t + \Delta t$ 時の変形を算出できることを示した。収束計算では、漸化式(2.4.27)中における左辺対称行列中の D と不釣り合い力項中の応力 $\sigma_v, \sigma_w, \tau_{vw}$ が随時変化する。よってこれらの値を算定する必要がある。本研究では、8-node 長方形要素内の応力状態は 2 次元平面応力状態にあると仮定した。すると弾性時では下式により歪から応力を得ることができる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D & \nu D & 0 \\ & D & 0 \\ sym & & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.5.1)$$

ここで

$$D = \frac{E}{1-\nu^2}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

E : 時刻 t における鋼材の初期接線係数

ν : ポアソン比 (鋼材では 0.3)

塑性領域における降伏条件はミーゼスの降伏条件に従うとし、歪増分は等方硬化則によるとした。よって塑性時の応力は下式により得ることができる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [D] - \frac{[D] \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} \cdot \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [D]}{1/H + \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [D^{ep}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.5.2)$$

但し、

$$H = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{E_t} - \frac{1}{E} \right) \cdot \frac{1}{f}$$

E_t : 鋼材の塑性時接線係数

D : 弾性領域での材料剛性マトリックス

$$[D] = \begin{bmatrix} D & \nu D & 0 \\ & D & 0 \\ sym & & G \end{bmatrix}$$

ここに D^{ep} を展開しておく。

$$f = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ij} - \frac{1}{6} \sigma_{ii}^2 = \frac{1}{2} \left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \frac{(\sigma_x + \sigma_y)^2}{3} + 2\tau_{xy}^2 \right] = \frac{1}{3} [\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2]$$

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} = \begin{Bmatrix} \frac{2\sigma_x - \sigma_y}{3} \\ \frac{2\sigma_y - \sigma_x}{3} \\ 2\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \\ 2\tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$[D] \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} = \begin{Bmatrix} D\sigma'_x + \nu D'_y \\ D\sigma'_x + \nu D'_y \\ 2G\tau \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D(\sigma'_x + \nu\sigma'_y) \\ D(\nu\sigma'_x + \sigma'_y) \\ 2G\tau \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} &= D(\sigma'_x + \nu\sigma'_y)\sigma'_x + D(\nu\sigma'_x + \sigma'_y)\sigma'_y + 4G\tau_y^2 \\ &= D(\sigma'^2_x + 2\nu\sigma'_x\sigma'_y + \sigma'^2_y) + 4G\tau_y^2 \end{aligned}$$

$$[D] \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T [D] = \begin{bmatrix} D^2(\sigma'_x + \nu\sigma'_y)^2 & D^2(\sigma'_x + \nu\sigma'_y)(\nu\sigma'_x + \sigma'_y) & 2GD(\sigma'_x + \nu\sigma'_y)\tau_y \\ & D^2(\nu\sigma'_x + \sigma'_y)^2 & 2GD(\nu\sigma'_x + \sigma'_y)\tau_y \\ \text{sym} & & 4G^2\tau_y^2 \end{bmatrix}$$

よって D^e は次式で示される。

$$[D^e] = \begin{bmatrix} D & \nu D & 0 \\ & D & 0 \\ \text{sym} & & G \end{bmatrix} - \frac{1}{K} \begin{bmatrix} D^2(\sigma'_x + \nu\sigma'_y)^2 & D^2(\sigma'_x + \nu\sigma'_y)(\nu\sigma'_x + \sigma'_y) & 2GD(\sigma'_x + \nu\sigma'_y)\tau_y \\ & D^2(\nu\sigma'_x + \sigma'_y)^2 & 2GD(\nu\sigma'_x + \sigma'_y)\tau_y \\ \text{sym} & & 4G^2\tau_y^2 \end{bmatrix} \quad (2.5.3)$$

但し、

$$K = \frac{4}{3} \cdot \frac{f}{\frac{1}{E_t} - \frac{1}{E}} + D(\sigma'^2_x + 2\nu\sigma'_x\sigma'_y + \sigma'^2_y) + 4G\tau_y^2$$

K 中の接線係数 E_t が歪の増大により変化するため、 D^e の成分は Newton 法の収束計算中に値が随時変化する。また温度が変化した場合も同様に、初期接線係数 E が変化するため、 D の成分が変化する。温度が変化した場合や Newton 法の収束計算で歪が変化した場合、実際の鋼材に即した E と E_t を与える必要がある。実際の鋼材の応力～歪関係の定式化は次節 2.6 に示す。

次に熱応力の取り扱いについて述べる。鋼材は温度の変化に比例して伸縮する性質を持ち、これによって鋼材には式(2.5.4)に示す線膨張歪が発生する。

$$\varepsilon_t = \alpha(T - T_0) \quad (2.5.4)$$

ここで

- α : 線膨張係数 (鋼材では約 $12 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$)
- T : 現在温度
- T_0 : 初期温度

実際の構造物では、部材が火災時に熱せられて線膨張した時、加熱された部材はその周辺架構により拘束され、内部に熱応力が発生する。本研究における解析では、この線膨張を初期歪として取り扱い、熱応力を解析対象部材全体に配分する。

2.6 高温時における鋼材の単軸応力～歪関係式

2次元平面応力状態下における弾性・塑性時の応力と歪関係を前節の式(2.5.1)と式(2.5.3)に示した。これらの式は解析対象材料の初期ヤング率 E や接線係数 E_t によるので、解析対象鋼材の定式化された応力～歪関係を得ることが必要である。本研究は SS400 を解析対象とするので、以下に鋼材 SS400 の定式化の方法を示す。

構造用鋼材 SS400 については、高温下の素材試験に基づいた T (温度)～ σ ～ ϵ 関係の整備された表示式が古村等[68]によって提案されている。高温時における応力～歪関係を表す古村式は、Ralph M Richard の提案式[68]を温度方向に拡張したものである。古村らによる鋼材の高温時における応力 σ と歪 ϵ の関係は次の構成式によって得る。

$$\begin{aligned}\sigma(\epsilon, T) &= \max\{\sigma^{(1)}(\epsilon, T), \sigma^{(2)}(\epsilon, T)\} \\ \sigma^{(1)}(\epsilon, T) &= \min\{E_t \cdot \epsilon, \sigma_y\} \\ \sigma^{(2)}(\epsilon, T) &= f(\epsilon, T) + E_{pt} \cdot \epsilon \\ f(\epsilon, T) &= \frac{E_{pt} \cdot \epsilon}{\left\{1 + |E_{pt}/\sigma_{or} \cdot \epsilon|^{n_t}\right\}^{1/n_t}}\end{aligned}\tag{2.6.1}$$

ここで $E_{pt} = E_t - E_{pi}$

E_t : T °Cにおける初期ヤング率

σ_y : T °Cにおける降伏応力

E_{pt} : T °Cにおける Plastic Modulus

σ_{or} : T °Cにおける reference plastic stress

n_t : T °Cにおける shape parameter

式(2.6.1)の $\sigma^{(1)}$ は初期勾配 E_t 、降伏応力 σ_y の弾塑性材料特性を示し、鋼材の棚の特性を数式化したものである。また $\sigma^{(2)}$ は鋼材の棚以外の特性を数式化したものである。

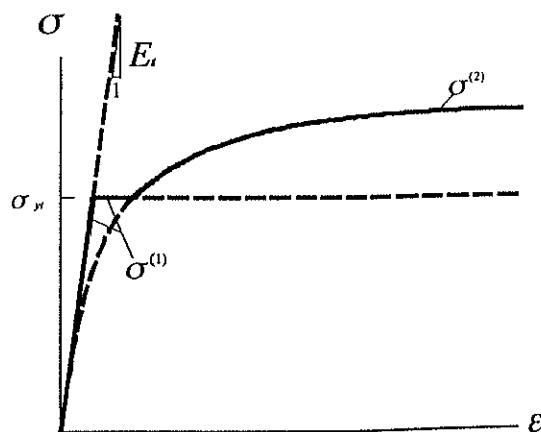


図 2.6.1 古村式(2.6.1)の $\sigma(\epsilon, T) = \max\{\sigma^{(1)}(\epsilon, T), \sigma^{(2)}(\epsilon, T)\}$

鋼材全体の応力～歪関係は図 2.6.1 に示すように、 $\sigma^{(1)}$ と $\sigma^{(2)}$ の大きい方とすることで得る。 $\sigma^{(2)}$ は $f(\varepsilon, T)$ と $E_p \cdot \varepsilon$ の和である。図 2.6.2(a)に示すように、 $f(\varepsilon, T)$ は初期勾配 E_0 ($E_0 = E_t - E_p$)を持ち、 σ_{ot} に漸近する曲線である。 $f(\varepsilon, T)$ 項の初期勾配を E_0 としたのは、 $E_p \cdot \varepsilon$ 項と足し合わせたときの初期勾配が E_t に一致させるためである。 $f(\varepsilon, T)$ 項の形から推測されるように、 n_t が無限大のとき、歪 ε_0 時応力が σ_{ot} に収束する。よって、 n_t により、 $f(\varepsilon, T)$ 曲線の凸度が定まる。また $E_p \cdot \varepsilon$ 項は図 2.6.2(b)に示すように、歪の大きな領域で材料線形硬化を表す項である。図 2.6.2(c)に示すように、 $f(\varepsilon, T)$ と $E_p \cdot \varepsilon$ を足し合わせることで、初期ヤング率 E_t 、硬化係数 E_p を有する鋼材の特性を表現できる。

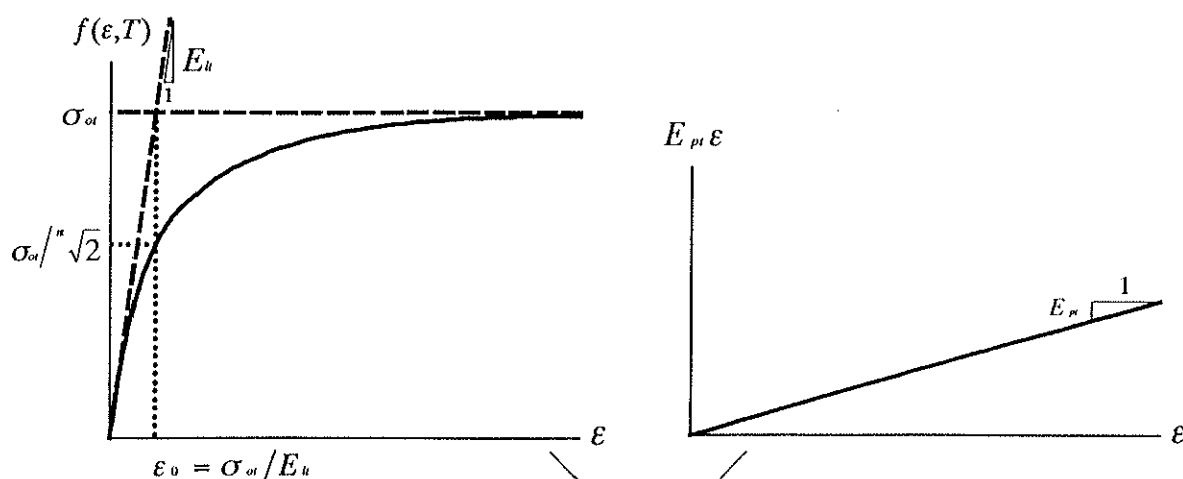


図 2.6.2(a) 古村式 $f(\varepsilon, T)$

図 2.6.2(b) 古村式 $E_p \cdot \varepsilon$

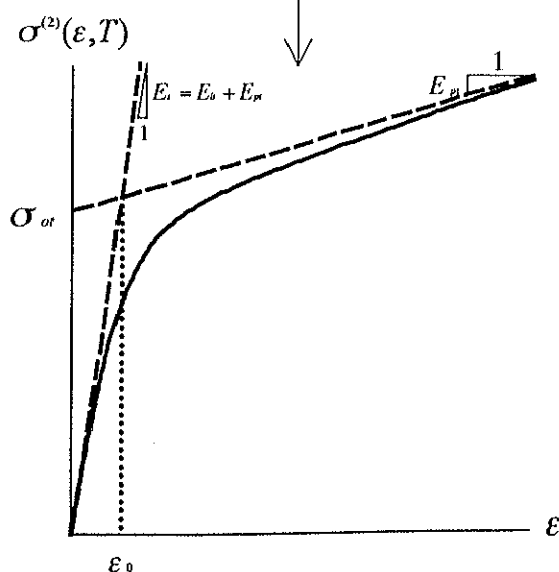


図 2.6.2(c) 古村式 $\sigma^{(2)}(\varepsilon, T)$

式(2.6.1)は5係数 $E_t, \sigma_y, E_p, \sigma_a, n_t$ によって確定する。これらの5係数は実験結果に基づき、温度 T の4次式で近似されている。構造用鋼材SS400に対する5係数の具体的数値及び関数表示は文献[68]に示されている。この表示式においてクリープ歪は無視されており、このときこれらの5係数は温度のみの関数であるので、温度と歪を与えることにより一義的に応力を得ることができる。しかし古村式(2.6.1)は温度については600℃以下、歪については2.5%以下の範囲の素材試験結果にcurve fittingを施して得たものであるから、これがこの式本来の適用範囲である。しかし600℃を上回る高温域でも崩壊しない架構は多数存在するし、また架構局部の歪が2.5%を超えることも少なくない。図2.6.7に古村式(2.6.1)による応力～歪曲線(破線)を示すが、古村式(2.6.1)は2.5%を超える歪域では応力の応答が過大になってしまう。これは式(2.6.1)中における $\sigma^{(2)}$ の第2項目の線形硬化を表す項 $E_p \varepsilon$ の効果によるものである。

以上を考慮し、古村式(2.6.1)に修正を加える。歪2.5%以下かつ温度600℃以下では、古村式(2.6.1)と良い対応関係を示し、さらに実用上重要なより広範囲の歪・温度領域では、実情に則した鋼材の応力～歪関係を提案する。実際の鋼材は図2.6.5、図2.6.6に示すように、常温から300℃付近までは、降伏応力は低下するが、歪1%付近の応力は逆に上昇する。この現象は、青熱脆性と呼ばれる鋼材特有の現象である。古村式を修正するにあたり、この青熱脆性効果は考慮にされない。その主な理由は、本研究が500℃を上回るような高温域における鋼梁の崩壊温度を対象としているからである。青熱脆性温度域では、鋼材の引張り強度が常温時における鋼材の引張り強度に漸近するように設定し、青熱脆性温度域での鋼材強度を安全側に評価するような、修正式を提案する。

古村式(2.6.1)を修正した過程を以下に述べる。まず歪の増大に伴い、応力が鋼材の引張り強度に漸近するよう、(2.6.1)式における $\sigma^{(2)}$ を以下の様に修正する。

$$\begin{aligned}\sigma^{(2)}(\varepsilon, T) &= f^{(1)}(\varepsilon, T) + f^{(2)}(\varepsilon, T) \\ f^{(1)}(\varepsilon, T) &= \frac{E_t \cdot \varepsilon}{\left\{1 + \left|E_t / \sigma_a \cdot \varepsilon\right|^n\right\}^{1/n}} \\ f^{(2)}(\varepsilon, T) &= \frac{E_p \cdot \varepsilon}{\sqrt{1 + \left|\varepsilon / \varepsilon_2\right|^2}} \\ \text{ここで } \varepsilon_2 &= 0.05\end{aligned}\tag{2.6.2}$$

(2.6.2)式では、古村式の歪硬化項 $E_p \varepsilon$ が歪無限大において $E_p \varepsilon_2$ に収束するように $f^{(2)}(\varepsilon, T)$ に置き換えた。図2.6.3に示すように、 $f^{(1)}(\varepsilon, T)$ と歪硬化項 $f^{(2)}(\varepsilon, T)$ を足し合わせることで、初期ヤング率 E_t 、歪硬化係数 E_p を持ち、歪無限大において、応力が $\sigma_a + E_p \varepsilon_2$ に漸近する応力～歪特性を表すことができる。 $\sigma_a + E_p \varepsilon_2$ が引張り強度と一致し、歪2.5%以下の領域においては各温度で古村式と良く一致するように5係数 $E_t, \sigma_y, E_p, \sigma_a, n_t$ を決定する。また5係数 $E_t, \sigma_y, E_p, \sigma_a, n_t$ の適用範囲を文献[48]に示される降伏強度低下率 $\kappa(T)$ に則して850℃まで拡張した。

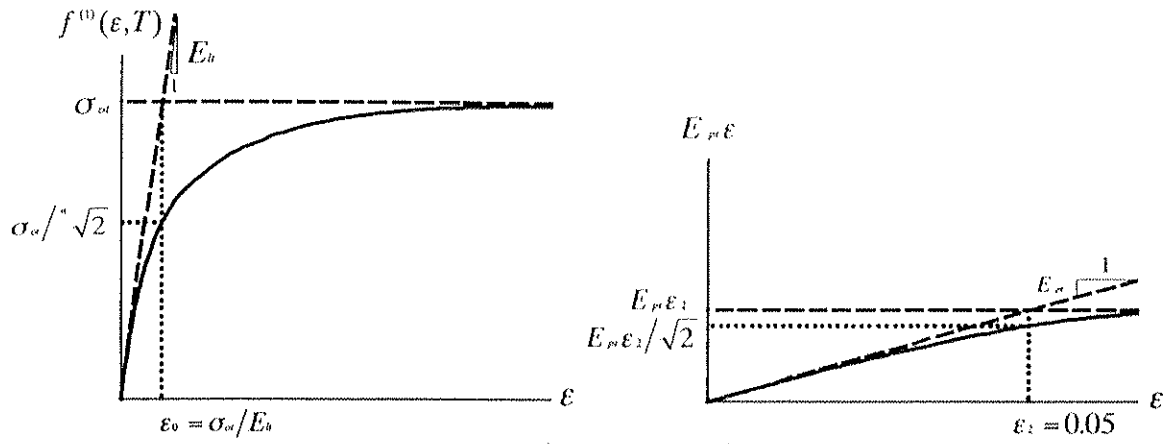


図2.6.3(a) 修正古村式 $f^{(1)}(\epsilon, T)$

図2.6.3(b) 修正古村式 $f^{(1)}(\epsilon, T)$

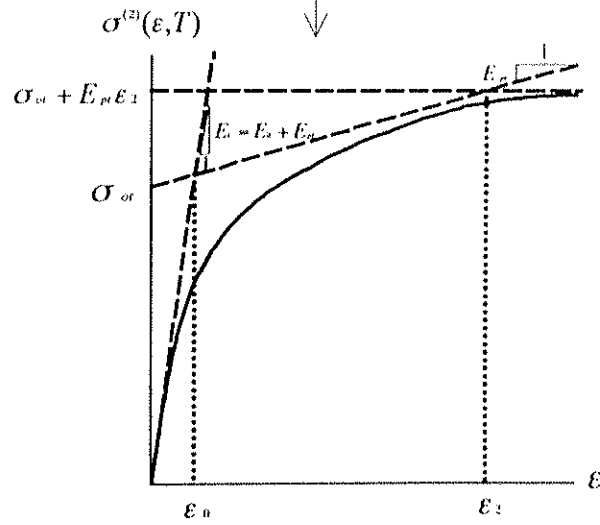


図2.6.3(c) 修正古村式 $\sigma^{(2)}(\epsilon, T)$

降伏強度低下率 $\kappa(T)$ とは、昇温に伴う鋼材の歪 1%時応力値の低下率を近似した式であり、下式で示される。

$$\kappa(T) = \begin{cases} 1 & (RT \leq T < 400) \\ 1 - \frac{0.9}{400}(T - 400) & (400 \leq T) \end{cases} \quad (2.6.3)$$

図 2.6.4 に歪 1%時応力の実験結果と強度低下率 $\kappa(T)$ の比較を示す。図 2.6.4 中、 $\bar{\sigma}_0$ は常温時における鋼材の降伏応力であり、歪 1%時強度を $\bar{\sigma}_0$ により無次元化して示す。

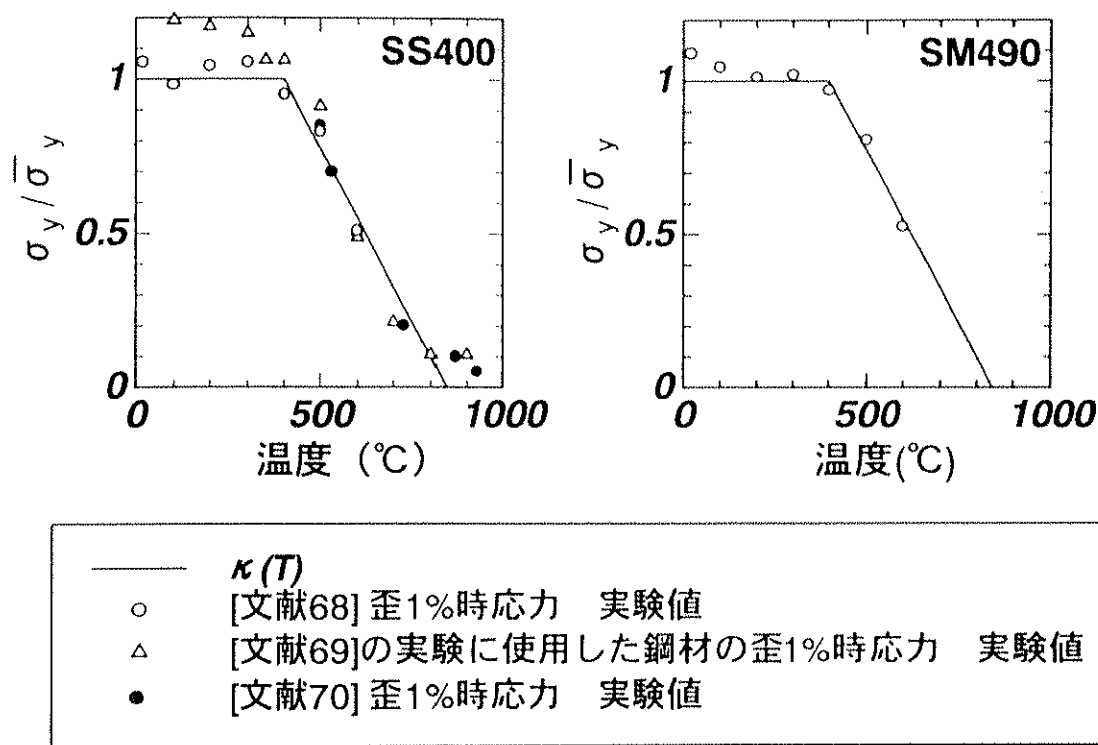


図 2.6.4 歪 1%時強度低下率

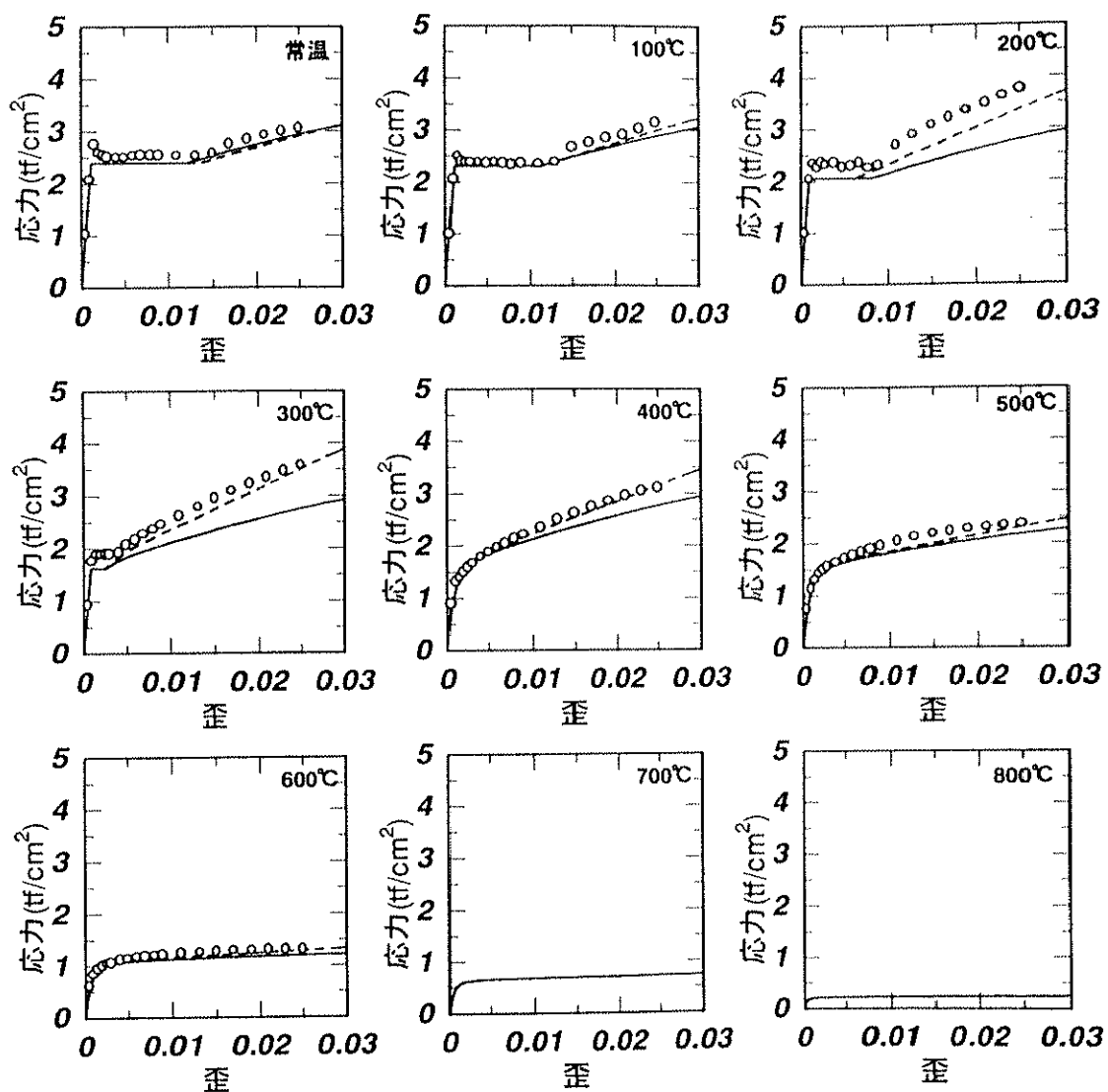
図 2.6.4 に見られるように、400℃以下では歪 1%時応力の低下は見られず、400℃から 850℃までは、ほぼ直線的に歪 1%時応力が低下していることがわかる。よって、図 2.6.4 に示すように、歪 1%時応力は強度低下率 $\kappa(T)$ により近似できるといえる。

600℃以上では歪硬化が小さいので、修正古村式(2.6.2)の歪 1%時応力値を降伏強度低下率 $\kappa(T)$ に一致させることで、実情に則した 600℃以上の応力～歪関係を得る。また 300℃以下における青熱温度域では、実際の鋼材の応力値は、常温時における応力値より上昇するが、この温度域での応力～歪関係を安全側に評価する為に、400℃以下における鋼材の引張強度が常温時における鋼材の引張強度に漸近するように E_p, σ_a を設定した。本研究は 500℃を上回るような高温域での鋼梁の崩壊温度を対象とするので青熱脆性温度域において、上記の様に簡略化しても問題はない。

鋼材 SS400（本研究の解析対象ではないが、修正後の SM490 も参考のため併記する）の修正後の諸係数を表 2.6.1 に示す。以上の修正を反映した(2.6.2)式による応力～歪曲線が図 2.6.5～図 2.6.7 に併記されている（実線）。図 2.6.5 と図 2.6.6 に示すように歪 2.5%以下かつ温度 600℃以下では、修正古村式(2.6.2)と古村式(2.6.1)は良い対応関係にあり、さらに図 2.6.7 に示すように、歪 2.5%以上、温度 600℃以上においては、実情に則した鋼材の応力～歪関係を提案できた。

表 2. 6. 1 修正古村式諸係数

SS400
$E_t(T) = (1.0 - 0.905 \cdot 10^{-6} \cdot T^2) \cdot E_{RT}$ $E_{RT} = 2100 \text{tf} / \text{cm}^2$
$\sigma_{yt}(T) = (1.001 - 3.592 \cdot 10^{-6} T^2) \cdot \sigma_{yRT}$ $\sigma_{yRT} = 2.4 \text{tf} / \text{cm}^2$
$E_{pt}(T) = (0^\circ\text{C}, 50.0 \text{tf} / \text{cm}^2), (400^\circ\text{C}, 50.0 \text{tf} / \text{cm}^2), (600^\circ\text{C}, 5.0 \text{tf} / \text{cm}^2) \text{と} (850^\circ\text{C}, 0.0 \text{tf} / \text{cm}^2)$ <p style="text-align: right;">を結ぶ線分</p>
$\sigma_{at}(T) = \begin{cases} T \leq 600^\circ\text{C} \text{ のとき} \\ (0.759 + 1.933 \cdot 10^{-4} T - 5.944 \cdot 10^{-6} T^2 + 2.179 \cdot 10^{-8} T^3 - 2.305 \cdot 10^{-11} T^4) \cdot \sigma_{yRT} \\ T > 600^\circ\text{C} \text{ のとき} \\ (600^\circ\text{C}, \sigma_{at}(600^\circ\text{C})) \text{と} (850^\circ\text{C}, 0.0 \text{tf} / \text{cm}^2) \text{を結ぶ線分} \end{cases}$
$n_t(T) = 1.7$
SM490
$E_t(T) = (1.0 - 1.050 \cdot 10^{-6} \cdot T^2) \cdot E_{RT}$ $E_{RT} = 2100 \text{tf} / \text{cm}^2$
$\sigma_{yt}(T) = (1.001 - 2.927 \cdot 10^{-6} T^2) \cdot \sigma_{yRT}$ $\sigma_{yRT} = 3.3 \text{tf} / \text{cm}^2$
$E_{pt}(T) = (0^\circ\text{C}, 50.0 \text{tf} / \text{cm}^2), (400^\circ\text{C}, 50.0 \text{tf} / \text{cm}^2), (600^\circ\text{C}, 5.0 \text{tf} / \text{cm}^2) \text{と} (850^\circ\text{C}, 0.0 \text{tf} / \text{cm}^2)$ <p style="text-align: right;">を結ぶ線分</p>
$\sigma_{at}(T) = \begin{cases} T \leq 600^\circ\text{C} \text{ のとき} \\ (0.840 - 1.303 \cdot 10^{-3} T + 8.192 \cdot 10^{-6} T^2 - 1.681 \cdot 10^{-8} T^3 + 8.379 \cdot 10^{-12} T^4) \cdot \sigma_{yRT} \\ T > 600^\circ\text{C} \text{ のとき} \\ (600^\circ\text{C}, \sigma_{at}(600^\circ\text{C})) \text{と} (850^\circ\text{C}, 0.0 \text{tf} / \text{cm}^2) \text{を結ぶ線分} \end{cases}$
$n_t(T) = 1.9$



○ [文献68] 実験結果
 --- 古村式(2.6.1)
 — 修正古村式(2.6.2)

図 2. 6. 5 SS400 に関して、古村式と修正古村式の比較

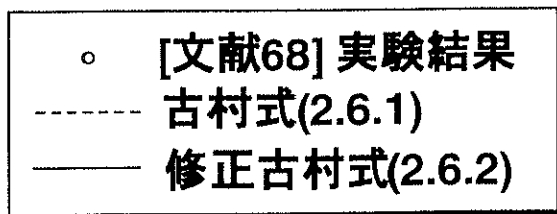
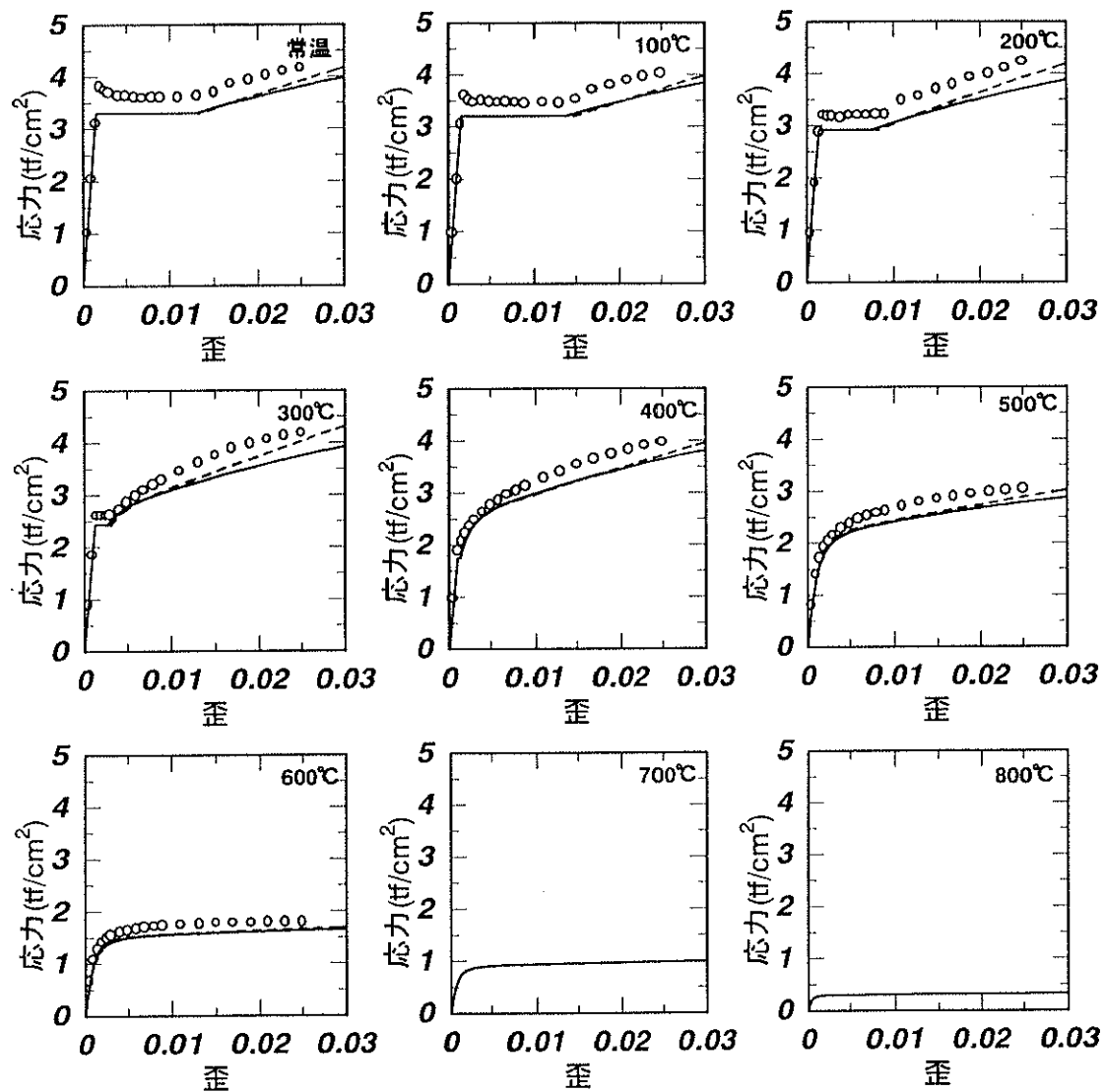


図 2.6.6 SM490 に関して、古村式と修正古村式の比較

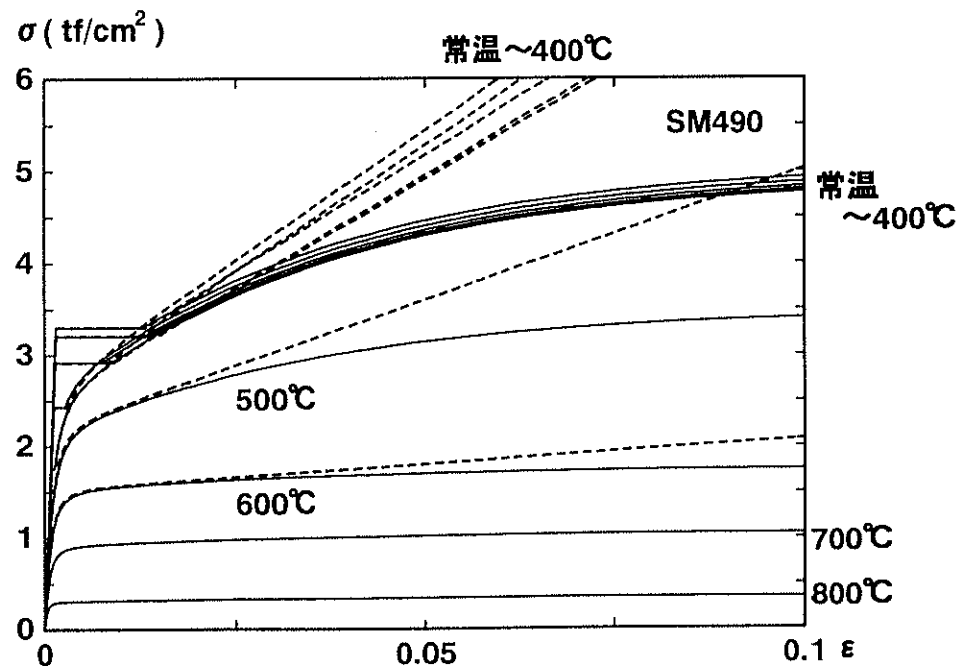
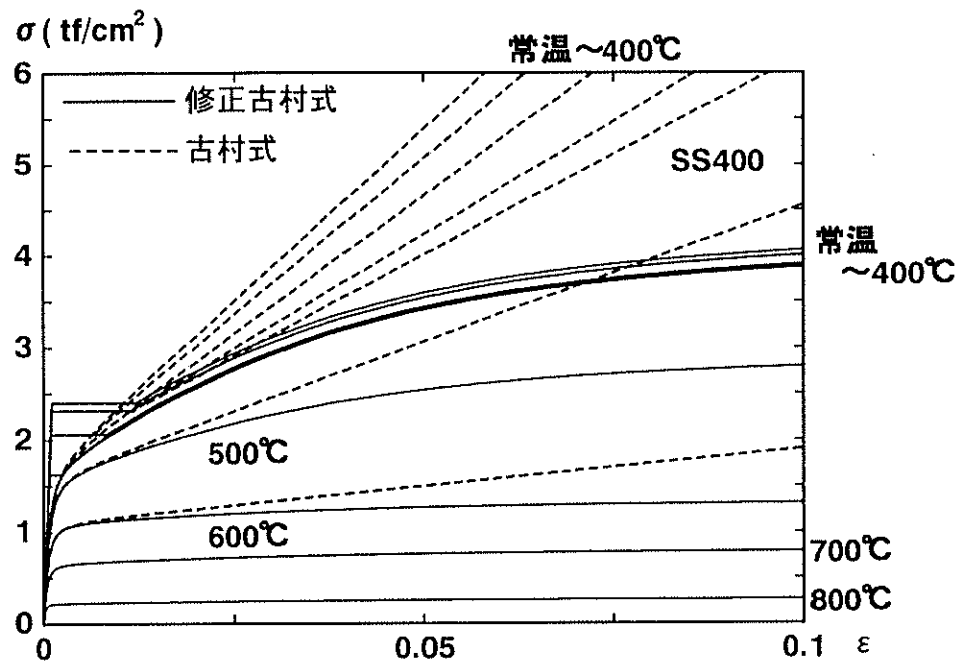


図 2.6.7 古村式と修正古村式の比較

2.7 H 型断面鋼梁の構成

これまでに得られた 8-node 長方形要素を用いて H 型断面部材を構成する。まず、包括的な座標系を考え、これを XYZ 全体座標系（図 2.7.1）とする。この座標系に変形前の H 型断面部材の図心を連ねる軸を Y 軸、断面内の強、弱軸をそれぞれ X、Z 軸にとる（図 2.7.2）。

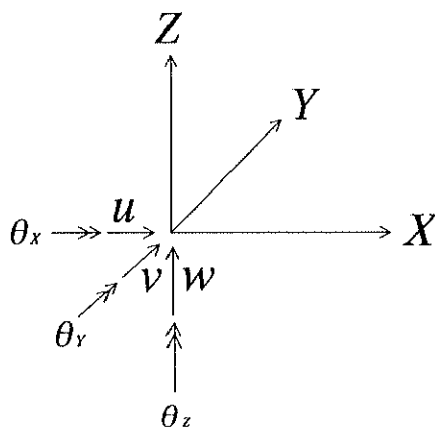


図 2.7.1 XYZ 全体座標系及び変位

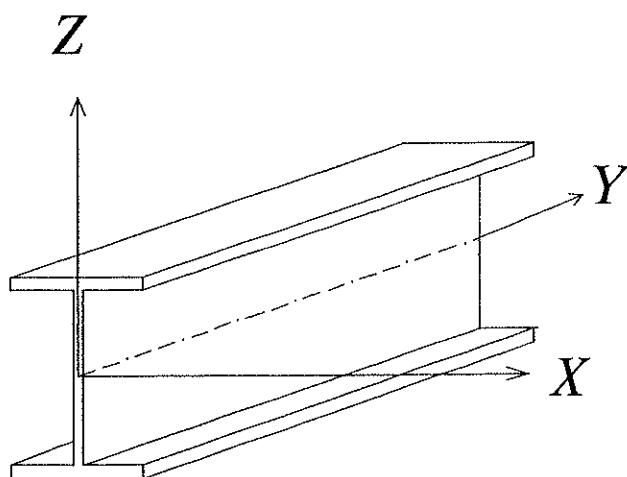


図 2.7.2 H 型断面部材の XYZ 全体座標系における配置

フランジでは、これまで用いた局所的な要素座標系である xyz 座標系と XYZ 座標系が一致するので各変位成分の対応は表 2.7.1 のようになる。

ウェブでは、xyz 座標系と XYZ 全体座標系は一致しない。そこで図 2.7.3 に示すように、xyz

座標系を y 軸左回りに 90 度回転させたときの各節点変位成分を XYZ 座標系での変位成分と対応させる。このときの変位成分の対応は表 2.7.2 のようになる。

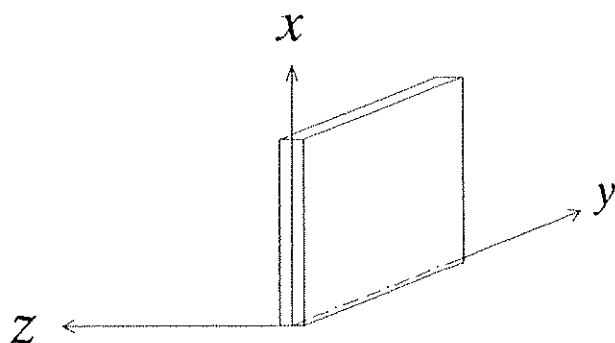


図 2.7.3 ウェブ要素の xyz 座標系

表 2.7.1 フランジ変位成分の対応

フランジ要素端 自由度	u	ϕ	v	θ	w	θ_w	ϕ_w
xyz 座標系 節点自由度	u	$-\theta_i^{(1)}$	v	$\theta_i^{(2)}$	w	$-\theta_y$	θ_z
方程式番号	0	5	1	6	2	4	3

表 2.7.2 ウェブ変位成分の対応

ウェブ要素端 自由度	u	ϕ	v	θ	w	θ_w	ϕ_w
XYZ 座標系 節点自由度	w	$\theta_z^{(1)}$	v	$-\theta_i^{(2)}$	$-u$	$-\theta_y$	$\theta_i^{(1)}$
方程式番号	2	3	1	6	0	4	5

本章の始めに述べたように、フランジとウェブの接合部で変位が連続する必要がある。そこでフランジ・ウェブ接合部では、フランジ要素の ϕ 、 ϕ_w とウェブ要素の ϕ_w 、 ϕ をそれぞれ等しくなるようにする。また、接合部ではせん断遅れ挙動を算出できるように、フランジ要素の θ の連続性をなくし、面内で折れ曲がることを許した。つまりフランジ・ウェブ接合部では節点の変位成分を 9 個持っていることになる。よって対応表は表 2.7.3、表 2.7.4 のようになる。ウェブについて

は表 2.7.2 を用いる。

表 2.7.3 右フランジ接合部変位成分の対応

右フランジ接合部要素端自由度	u	ϕ	v	θ	w	θ_w	ϕ_w
X Y Z 座標系 節点自由度	u	$-\theta_i^{(1)}$	v	$\theta_i^{(1)}$	w	$-\theta_r$	$\theta_i^{(1)}$
方程式番号	0	5	1	7	2	4	3

表 2.7.4 左フランジ接合部変位成分の対応

左フランジ接合部要素端自由度	u	ϕ	v	θ	w	θ_w	ϕ_w
X Y Z 座標系 節点自由度	u	$-\theta_i^{(1)}$	v	$\theta_i^{(1)}$	w	$-\theta_r$	$\theta_i^{(1)}$
方程式番号	0	5	1	8	2	4	3

実際の鋼梁解析においては、解析対象梁に何らかの境界条件を与える必要がある。以下に本研究の解析に用いた境界条件を示す。

1. 固定端 (Clamped)

通常の H 型鋼梁の解析では、H 型鋼梁が柱と接合している状態を解析の対象としているが、本研究では鋼梁単独部材の解析を対象とする。よって固定端では回転角を全て固定、下フランジウェブ接合部の全自由度、上フランジウェブ接合部の u (X 方向並進)、上下フランジの v (y 方向並進)、ウェブの u (x 方向並進)、 v (y 方向並進) を固定する。上下フランジの u (x 方向並進)、 w (z 方向並進)、ウェブの w (z 方向並進) を固定しないのは、熱膨張により断面が膨張し、過大な熱応力を発生してしまうからである。つまり、外力に対して固定だが、断面の熱膨張はできるという境界条件を設定している。

2. ローラー支点 (Roller)

ローラー支点では下フランジウェブ接合部の u (x 方向並進)、 w (z 方向並進)、下フランジの w (z 方向並進) を固定する。さらに上フランジが倒れこむを防ぐため、上フランジウェブ接合部の u (x 方向並進) も固定する。これは横滑りと浮き上りを押さえたもので、強軸回りは下フランジを軸に、弱軸回りはウェブを軸に回転できる (但し、弱軸方向の回転には断面

変形を伴う)。

3. ヒンジ支点 (Hinged)

ヒンジ支点では、ローラー支点にさらに下フランジの v (y 方向並進) を固定したものとする。

4. 対称支点 (Symmetry)

これは左右対称な境界条件を持つ部材の中間点を表したもので、フランジの境界節点で、 u (x 方向並進)、 w (z 方向並進)、 θ_y (y 方向回転角)、ウェブの境界節点で u (z 方向並進)、 w (x 方向並進)、 θ_y (y 方向回転角) のみ変位を持てるものとする。つまり、部材中間点でのたわみ、ねじれを表すことができる境界条件である。この対象支点を解析に適用する場合は、解析対称梁の変形が対称支点を軸として、左右対称であることが必要条件である。

2.8 本章まとめ

薄板の有限要素解析における代表的な研究で知られる Bathe の 4-node shell 要素は、4-node shell 要素を H 型に集成すると、ウェブ・フランジ接合部分において本来発生するであろう変形を拘束してしまう。よって、Bathe の 4-node shell 要素を改良し、4-node shell の各節点に 2 つの独立した面内回転自由度を付加し、1 要素 32 自由度からなる 8-node 長方形要素を提案した。提案した 8-node 長方形要素から成る H 型鋼梁数値解析モデルは、ウェブ・フランジ接合部分の変形を明らかに拘束せず、本来梁が有するであろう変形を解析できることを示した。

また、H 型鋼梁の任意点の応力状態を平面応力状態と仮定し、また 8-node 長方形要素の剛性マトリックスを記述する際、板要素内の歪を Lagrange 歪で記述した。よって研究で示す H 型鋼梁数値解析モデルは、大変形解析に対応した数値解析モデルである。また降伏条件はミーゼスの降伏条件に従うとし、塑性域での歪増分は等方硬化則に従うものとした。

本研究に使用する H 型鋼梁数値解析モデルは、本研究の目的上、幾何学的非線形と材料非線形を含むので、任意形の 8-node 長方形要素に関して荷重増分～節点変位増分の漸化式を導出し、これにより、H 型鋼梁数値解析モデルの変形を Newton 法の収束計算により算出する方法を採用した。

数値解析用の高温時における鋼材の応力～歪関係は現在まで、古村式が多用されていた。しかし、古村式は歪 5%以上の歪の大きい領域では、古村式の線形硬化項 $E_s \cdot \epsilon$ の効果により、実際の鋼材強度を過剰に評価してしまう。本研究では、歪 5%以上の、鋼梁が大きく塑性変形した後の数値解析を対象とするので、古村式の線形硬化項を修正し、より実情の鋼材の応力～歪曲線に則した修正古村式を提案した。